O równomiernym wypalaniu się świec wieńca adwentowego

Analiza kombinatoryczna z uwzględnieniem różowej świecy

Wspólnota Ponad Murami
https://czteryswiece.ponadmurami.pl

Adwent 2026

Streszczenie

Każdy, kto choć raz patrzył w Wigilię na wieniec adwentowy, zna ten widok: pierwsza świeca to ogarek, czwarta jest prawie nowa. W niniejszej pracy stawiamy pytanie, czy przy równomiernym spalaniu istnieje schemat zapalania świec, po którym wszystkie wypalą się po równo. Pokazujemy, że gdy każda niedziela jest niepodzielna, taki schemat **nie istnieje**, a gdy niedzielę podzielimy na dwie połowy, **istnieje** (i jest ich 480). Dowodzimy też, że uszanowanie różowej świecy Gaudete wyklucza równy podział przy dowolnie drobnym podziale czasu. Na koniec podajemy proste kryterium dla wieńca o n świecach.

Słowa kluczowe: wieniec adwentowy, podzielność, schematy zapalania, Gaudete, zasada zachłanna



Rysunek 1: Wieniec w warunkach laboratoryjnych.

1 Problem

Wieniec ma cztery świece. W pierwszą niedzielę Adwentu pali się jedna, w drugą dwie, w trzecią trzy, a w czwartą wszystkie cztery. Zwyczaj podpowiada, by co tydzień dopalać tę samą „starą” świecę i dokładać nową. Wtedy pierwsza świeca płonie cztery niedziele, a czwarta tylko jedną. Różnica wysokości jest widoczna gołym okiem i budzi w domownikach uzasadniony niepokój.[1]

Przyjmujemy następujące założenia:

- wszystkie świece są jednakowe i spalają się w stałym tempie;
- świece palą się tylko w niedziele, a każda niedziela trwa tyle samo;
- w k-tą niedzielę płonie dokładnie k świec, ale **które**, wybieramy dowolnie;
- przeciągi, koty i dzieci z zapałkami pomijamy.[2]

Pytanie brzmi: czy da się wybrać świece tak, by w Wigilię wszystkie cztery miały tę samą wysokość?

2 Niedziela w całości: nie da się

Twierdzenie 1. *Jeśli każdą świecę zapala się na całą niedzielę albo wcale, to żaden schemat nie wypala czterech świec po równo.*

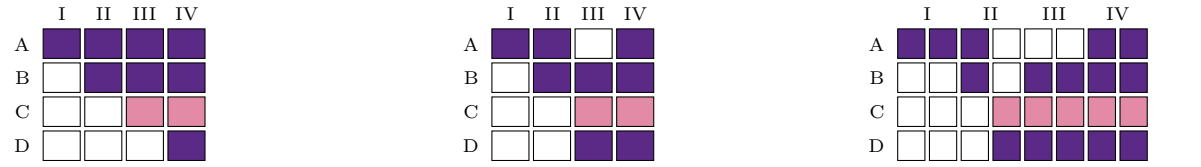
Dowód. Łącznie świece palą się $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ świeco-niedziel. Przy równym podziale każda paliłaby się $10/4 = 2{,}5$ niedzieli. Czas palenia każdej świecy jest jednak liczbą całkowitą, a 2,5 nią nie jest. □

Najlepsze, co można osiągnąć, to podział $3, 3, 2, 2$: dwie świece paliły się o jedną niedzielę dłużej niż pozostałe dwie. Spośród $4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1 = 96$ możliwych schematów tak dobry wynik daje 48. Przykład: w I niedzielę A, w II A i B, w III B, C i D, w IV wszystkie. Zwyczajowy schemat (zawsze dokładamy nową świecę) daje podział $4, 3, 2, 1$ i jest najgorszy z możliwych.[3]

[1] Obserwacja własna, powtarzana corocznie od wielu lat.

[2] Model z kotem pozostawiamy jako problem otwarty.

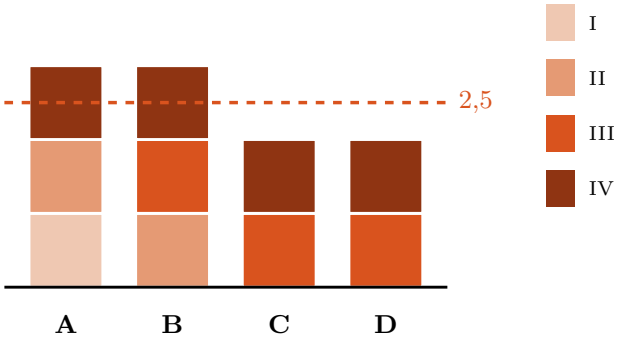
[3] Najgorszy w sensie różnicy między najdłuższą a najkrótszą świecą. Zwyczaj ma za to inne zalety, np. nie wymaga tabelki na lodówce.



Rysunek 2: Schematy zapalania. Pole zamalowane: świeca płonie.

Tabela 1: Wyniki pełnego przeglądu schematów (wieniec 4 świec).

Podział niedzieli	Różowa czeka	Dopuszczalne	Najmniejsza różnica	Najlepsze
cała	nie	96	1 niedz.	48
cała	tak	27	1 niedz.	15
połowy	nie	9 216	0	480
połowy	tak	1 215	1 niedz.	240
trzecie	nie	884 736	$\frac{1}{3}$ niedz.	131 040
trzecie	tak	45 927	$\frac{1}{3}$ niedz.	1 710



Rysunek 3: Dowód Twierdzenia 1: dziesięć świeco-niedziel w czterech kolumnach. Linia przerywana to sprawiedliwy udział 2,5.

3 Niedziela na połowy: da się

Twierdzenie 2. *Jeśli każdą niedzielę podzielimy na dwie równe połowy i w każdej z nich płonie k świec, to istnieje schemat, po którym wszystkie świece wypalą się idealnie równo.*

Dowód. Połówek jest $2 \cdot 10 = 20$, więc każda świeca powinna płonąć 5 połówek. Taki schemat podajemy wprost: I niedziela: A | A; II: A B | C D; III: B C D | B C D; IV: wszystkie | wszystkie. Każda świeca płonie dokładnie 5 połówek. □

W praktyce oznacza to, że w połowie drugiej niedzieli gasimy A i B, a zapalamy C i D. Spośród 9216 dopuszczalnych schematów połówkowych idealnych jest 480. Czy rodzina zaakceptuje gaszenie świec w połowie modlitwy, wykracza poza zakres niniejszej pracy.

4 Lemat o różowej świecy

Trzecia niedziela Adwentu to *Gaudete*, niedziela radości, i wtedy po raz pierwszy zapala się świecę różową. Jeśli ten zwyczaj szanujemy, różowej nie wolno zapalić przed III niedzielą.

Lemat 3. *Jeśli różowa świeca nie może płonąć przed III niedzielą, to przy* ***dowolnym*** *podziale niedzieli na równe części świece nie wypalą się po równo.*

Dowód. Różowa może płonąć najwyżej przez III i IV niedzielę, czyli łącznie 2 niedziele. Do równego podziału potrzebuje 2,5. Drobniejszy podział czasu nic tu nie zmieni, bo brakuje całej połowy niedzieli, a nie kawałka części. □

Co da się zrobić? Bez podziału najlepszy jest znów podział 3, 3, 2, 2, przy którym różowa paliła się 2 niedziele (15 takich schematów na 27). Przy połowach najlepiej wychodzi 3; 2,5; 2; 2,5, więc odchylenie łącznie jest dwa razy mniejsze niż bez podziału. Przy podziale na trzy części udaje się coś pięknego: trzy fioletowe świece palą się po równo, każda po $2\frac{2}{3}$ niedzieli, a różowa tylko 2.

Wniosek duszpasterski. Różowa świeca zawsze zostaje najwyższa. Radość wytrzymuje dłużej niż pokuta.[4]

5 Uogólnienie: wieniec o n świecach

Rozważmy wieniec z n świecami i n niedzielami, w którym każdą niedzielę dzielimy na m równych części, a w każdej części k-tej niedzieli płonie k świec.

Twierdzenie 4. *Równy podział istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $m(n+1)$ jest parzysta.*

Dowód. Wszystkich „świeco-części” jest $m \cdot \frac{n(n+1)}{2}$, więc na jedną świecę przypada $\frac{m(n+1)}{2}$. Musi to być

[4] Teza teologiczna nie była przedmiotem recenzji.

liczba całkowita, stąd warunek konieczny. Dostateczność pokazuje strategia zachłanna: w każdej części zapalamy k świec, które paliły się dotąd najkrócej. Jeśli przed daną częścią czasy palenia różnią się co najwyżej o 1, to po niej też (podnosimy najniższe). Na końcu suma dzieli się przez n, a wartości różnią się co najwyżej o 1, więc wszystkie są równe. □

Wynika z tego zabawny fakt: wieniec z **trzema** albo **pięcioma** świecami dałoby się wypalić równo bez żadnego dzielenia niedziel. Cztery świece to, matematycznie rzecz biorąc, najmniej wygodny wybór.[5]

Tabela 2: Czy równy podział istnieje dla n świec i m części niedzieli (✓ — tak).

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6
2	·	✓	·	✓	·	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	·	✓	·	✓	·	✓
5	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6	·	✓	·	✓	·	✓
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	·	✓	·	✓	·	✓

6 Wnioski

- Bez dzielenia niedziel równe wypalenie czterech świec jest niemożliwe. Najlepszy wynik to $3, 3, 2, 2$.
- Po podzieleniu niedziel na połowy jest możliwe na 480 sposobów.
- Jeśli różowa czeka na Gaudete, równego wypalenia nie da się osiągnąć żadnym podziałem czasu.
- W ogólnym przypadku wystarczy sprawdzić, czy $m(n+1)$ jest parzyste.



Rysunek 4: Weryfikacja eksperymentalna (Wigilia, wariant połówkowy).

Praktyczna rada na koniec: jeśli zależy Wam na równych świecach, zapalajcie co niedzielę te, które są najwyższe. To właśnie strategia zachłanna z Twierdzenia 4, dobra także wtedy, gdy nikt nie prowadzi tabelki.

[5] Nie postulujemy zmian w tradycji. Tylko zauważamy.

Wersja interaktywna: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/`
Kod źródłowy do replikacji wyników: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/wieniec/`

Bibliografia

1. J. H. Wichern, pierwszy wieniec adwentowy w Rauhes Haus, Hamburg 1839 (przekaz historyczny; według tradycji miał świece na każdy dzień Adwentu).
2. Ogólne normy roku liturgicznego i kalendarza, 1969, nr 39–42 (Adwent ma cztery niedziele).
3. P. G. L. Dirichlet, zasada szufladkowa, XIX w. (przywołana tu bardziej z sentymentu niż z konieczności).