Sobre a combustão uniforme das velas da coroa do Advento

Uma análise combinatória com especial atenção à vela rosa

Comunidade Ponad Murami
`https://czteryswiece.ponadmurami.pl`

Advento 2026

Resumo

Quem já olhou para a coroa do Advento na Véspera de Natal conhece bem a cena: a primeira vela é um toco, a quarta está quase nova. No presente trabalho perguntamos se, admitindo uma combustão uniforme, existe um esquema de acendimento das velas que faça com que todas se consumam por igual. Mostramos que, quando cada domingo é indivisível, tal esquema **não existe**, e que, quando o domingo é dividido em duas metades, **existe** (havendo 480 deles). Demonstramos ainda que respeitar a vela rosa do Gaudete exclui uma divisão igual, por mais fina que seja a subdivisão do tempo. Por fim, apresentamos um critério simples para uma coroa com n velas.

Palavras-chave: coroa do Advento, divisibilidade, esquemas de acendimento, Gaudete, algoritmo guloso



Figura 1: A coroa em condições de laboratório.

1 O problema

A coroa tem quatro velas. No primeiro domingo do Advento arde uma, no segundo duas, no terceiro três e no quarto todas as quatro. O costume sugere que todas as semanas se volte a acender a mesma vela "velha" e se acrescente uma nova. Assim, a primeira vela arde quatro domingos e a quarta apenas um. A diferença de altura é visível a olho nu e causa nos membros do agregado familiar uma inquietação fundamentada.[1]

Adotamos os seguintes pressupostos:

- todas as velas são idênticas e consomem-se a ritmo constante;
- as velas só ardem aos domingos, e todos os domingos têm a mesma duração;
- no k-ésimo domingo ardem exatamente k velas, mas **quais**, escolhemos livremente;
- correntes de ar, gatos e crianças com fósforos são desprezados.[2]

A pergunta é: será possível escolher as velas de modo que, na Véspera de Natal, as quatro tenham a mesma altura?

2 Domingo inteiro: não é possível

Teorema 1. *Se cada vela é acesa durante o domingo inteiro ou não é acesa de todo, nenhum esquema consome as quatro velas por igual.*

Demonstração. No total, as velas ardem $1+2+3+4=10$ vela-domingos. Numa divisão igual, cada uma arderia $10/4 = 2{,}5$ domingos. Porém, o tempo de combustão de cada vela é um número inteiro, e 2,5 não o é. □

O melhor que se consegue é a distribuição $3,3,2,2$: duas velas arderam um domingo a mais do que as outras duas. Dos $4\cdot 6\cdot 4\cdot 1 = 96$ esquemas possíveis, 48 alcançam este resultado. Exemplo: no I domingo

[1] Observação própria, repetida anualmente há muitos anos.

[2] O modelo com gato fica como problema em aberto.

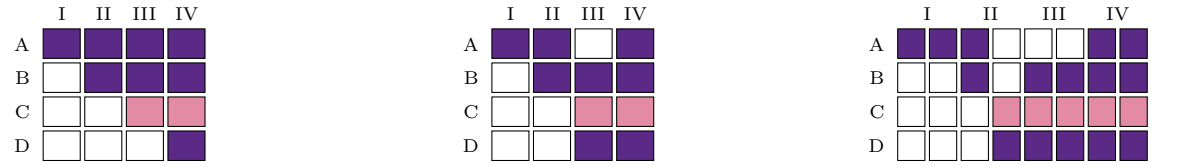


Figura 2: Esquemas de acendimento. Célula preenchida: a vela arde.

Tabela 1: Resultados da pesquisa exaustiva (coroa de 4 velas).

Divisão do domingo	A rosa espera	Admissíveis	Menor diferença	Ótimos
inteiro	não	96	1 dom.	48
inteiro	sim	27	1 dom.	15
metades	não	9.216	0	480
metades	sim	1.215	1 dom.	240
terços	não	884.736	$\frac{1}{3}$ dom.	131.040
terços	sim	45.927	$\frac{2}{3}$ dom.	1.710

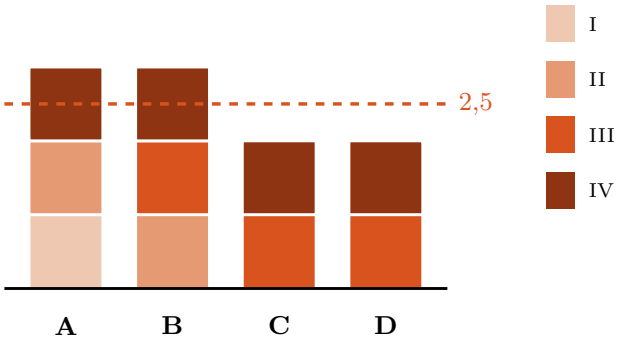


Figura 3: Demonstração do Teorema 1: dez velas-domingos em quatro colunas. A linha tracejada é a parte justa 2,5.

A, no II A e B, no III B, C e D, no IV todas. O esquema habitual (acrescentar sempre uma vela nova) dá a distribuição $4, 3, 2, 1$ e é o pior possível.[3]

3 Domingo em metades: é possível

Teorema 2. *Se dividirmos cada domingo em duas metades iguais e em cada uma delas arderem k velas, existe um esquema que consome todas as velas de forma perfeitamente igual.*

Demonstração. Há $2 \cdot 10 = 20$ metades, pelo que cada vela deve arder 5 metades. Eis um esquema explícito: I domingo: A | A; II: A B | C D; III: B C D | B C D; IV: todas | todas. Cada vela arde exatamente 5 metades. □

Na prática, isto significa que a meio do segundo domingo apagamos A e B e acendemos C e D. Dos 9216 esquemas admissíveis por metades, 480 são perfeitos. Saber se a família aceitará que se apaguem velas a meio da oração ultrapassa o âmbito do presente trabalho.

4 Lema da vela rosa

O terceiro domingo do Advento é o domingo *Gaudete*, o domingo da alegria, e é nele que se acende pela primeira vez a vela rosa. Se respeitarmos este costume, a vela rosa não pode ser acesa antes do III domingo.

Lema 3. *Se a vela rosa não puder arder antes do III domingo, então, para **qualquer** divisão do domingo em partes iguais, as velas não se consomem por igual.*

Demonstração. A vela rosa pode arder, no máximo, durante o III e o IV domingos, ou seja, 2 domingos no total. Para uma divisão igual precisaria de 2,5. Uma subdivisão mais fina do tempo nada altera, porque falta meio domingo inteiro, e não um pedacinho de uma parte. □

O que se pode fazer? Sem divisão, o melhor volta a ser a distribuição $3, 3, 2, 2$, em que a vela rosa ardeu 2 domingos (15 esquemas destes em 27). Com metades, o melhor resultado é 3; 2,5; 2; 2,5, pelo que o desvio total é metade do obtido sem divisão. Com a divisão em três partes consegue-se algo belíssimo: as três velas roxas ardem por igual, cada uma $2\frac{2}{3}$ domingos, e a rosa apenas 2.

Conclusão pastoral. A vela rosa fica sempre a mais alta. A alegria dura mais do que a penitência.[4]

5 Generalização: coroa com n velas

Consideremos uma coroa com n velas e n domingos, em que cada domingo é dividido em m partes iguais e, em cada parte do k-ésimo domingo, ardem k velas.

[3] Pior no sentido da diferença entre a vela mais gasta e a menos gasta. O costume tem, em contrapartida, outras vantagens, por exemplo não exigir uma tabela afixada no frigorífico.

[4] A tese teológica não foi objeto de revisão por pares.

Teorema 4. *Existe uma divisão igual se e só se o número $m(n+1)$ for par.*

Demonstração. Há ao todo $m \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ "vela-partes", pelo que a cada vela cabem $\frac{m(n+1)}{2}$. Este valor tem de ser inteiro, donde a condição necessária. A suficiência decorre do algoritmo guloso: em cada parte acendemos as k velas que até então arderam menos tempo. Se antes de uma dada parte os tempos de combustão diferem no máximo 1, depois dela também (subimos as mais baixas). No fim, a soma é divisível por n e os valores diferem no máximo 1, logo são todos iguais. □

Daqui resulta um facto curioso: uma coroa com **três** ou **cinco** velas poderia ser consumida por igual sem dividir domingo nenhum. Quatro velas são, em rigor matemático, a escolha menos conveniente.[5]

Tabela 2: Existe divisão igual para n velas e m partes do domingo? (✓ — sim).

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6
2	·	✓	·	✓	·	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	·	✓	·	✓	·	✓
5	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6	·	✓	·	✓	·	✓
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	·	✓	·	✓	·	✓

6 Conclusões

- Sem dividir os domingos, é impossível consumir as quatro velas por igual. O melhor resultado é $3, 3, 2, 2$.
- Dividindo os domingos em metades, é possível de 480 maneiras.
- Se a vela rosa esperar pelo Gaudete, nenhuma divisão do tempo permite um consumo igual.
- No caso geral, basta verificar se $m(n+1)$ é par.



Figura 4: Verificação experimental (Véspera de Natal, variante por metades).

[5] Não propomos alterações à tradição. Limitamo-nos a constatar.

Um conselho prático para terminar: se fazem questão de velas iguais, acendam em cada domingo as que estiverem mais altas. É precisamente o algoritmo guloso do Teorema 4, que funciona mesmo quando ninguém mantém uma tabela.

Versão interativa: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/pt/`
Código de replicação: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/pt/wieniec/`

Bibliografia

1. J. H. Wichern, a primeira coroa do Advento na Rauhes Haus, Hamburgo 1839 (relato histórico; segundo a tradição, tinha uma vela para cada dia do Advento).
2. Normas universais sobre o ano litúrgico e o calendário, 1969, n.º 39–42 (o Advento tem quatro domingos).
3. P. G. L. Dirichlet, princípio da casa dos pombos, séc. XIX (aqui invocado mais por afeto do que por necessidade).