Sur la combustion uniforme des bougies de la couronne de l'Avent

Analyse combinatoire tenant compte de la bougie rose

Communauté Ponad Murami
https://czteryswiece.ponadmurami.pl

Avent 2026

Résumé

Quiconque a déjà regardé une couronne de l'Avent la veille de Noël connaît ce spectacle : la première bougie n'est plus qu'un moignon, la quatrième est presque neuve. Dans le présent article, nous nous demandons si, sous l'hypothèse d'une combustion uniforme, il existe un schéma d'allumage des bougies au terme duquel toutes se consument à parts égales. Nous montrons que, si chaque dimanche est indivisible, un tel schéma **n'existe pas**, et que, si l'on coupe le dimanche en deux moitiés, il **existe** (on en dénombre 480). Nous démontrons en outre que le respect de la bougie rose de Gaudete exclut tout partage égal, quelle que soit la finesse du découpage du temps. Nous donnons enfin un critère simple pour une couronne à n bougies.

Mots-clés: couronne de l'Avent, divisibilité, schémas d'allumage, Gaudete, algorithme glouton



Figure 1: La couronne en conditions de laboratoire.

1 Le problème

La couronne compte quatre bougies. Le premier dimanche de l'Avent, on en allume une, le deuxième deux, le troisième trois et le quatrième les quatre. L'usage veut que l'on rallume chaque semaine la même « vieille » bougie en en ajoutant une nouvelle. La première bougie brûle alors quatre dimanches, la quatrième un seul. La différence de hauteur est visible à l'œil nu et suscite chez les membres du foyer une inquiétude légitime.[1]

Nous adoptons les hypothèses suivantes :

- toutes les bougies sont identiques et se consument à vitesse constante ;
- les bougies ne brûlent que le dimanche, et tous les dimanches ont la même durée ;
- le k-ième dimanche, exactement k bougies brûlent, mais le choix de **lesquelles** est libre ;
- on néglige les courants d'air, les chats et les enfants munis d'allumettes.[2]

La question est donc : peut-on choisir les bougies de sorte que, la veille de Noël, toutes les quatre aient la même hauteur ?

2 Dimanche entier : impossible

Théorème 1. *Si chaque bougie est allumée pour tout le dimanche ou pas du tout, aucun schéma ne consume les quatre bougies à parts égales.*

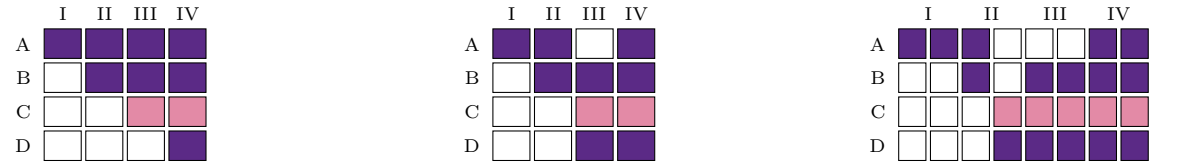
Démonstration. Au total, les bougies brûlent $1+2+3+4=10$ bougie-dimanches. Avec un partage égal, chacune brûlerait $10/4 = 2{,}5$ dimanches. Or la durée de combustion de chaque bougie est un nombre entier, ce que 2,5 n'est pas. □

Le mieux que l'on puisse obtenir est la répartition $3,3,2,2$: deux bougies ont brûlé un dimanche de plus que les deux autres. Parmi les $4\cdot6\cdot4\cdot1=96$ schémas possibles, 48 atteignent ce résultat. Exemple : Ier dimanche A, IIe A et B, IIIe B, C et D, IVe toutes. Le schéma coutumier (on ajoute toujours une bougie neuve) donne la répartition $4,3,2,1$ et est le pire possible.[3]

[1] Observation personnelle, répétée chaque année depuis de nombreuses années.

[2] Le modèle avec chat est laissé comme problème ouvert.

[3] Le pire au sens de l'écart entre la bougie la plus longue et



Traditionnel $(4,3,2,1)$ — Le meilleur sans découpage $(3,3,2,2)$ — Parfait avec moitiés $(5,5,5,5$ moitiés$)$

Figure 2: Schémas d'allumage. Case pleine : la bougie brûle.

Table 1: Résultats de la recherche exhaustive (couronne de 4 bougies).

Découpage du dimanche	La rose attend	Admissibles	Écart minimal	Optimaux
entier	non	96	1 dim.	48
entier	oui	27	1 dim.	15
moitiés	non	9 216	0	480
moitiés	oui	1 215	1 dim.	240
tiers	non	884 736	$\frac{1}{3}$ dim.	131 040
tiers	oui	45 927	$\frac{1}{3}$ dim.	1 710

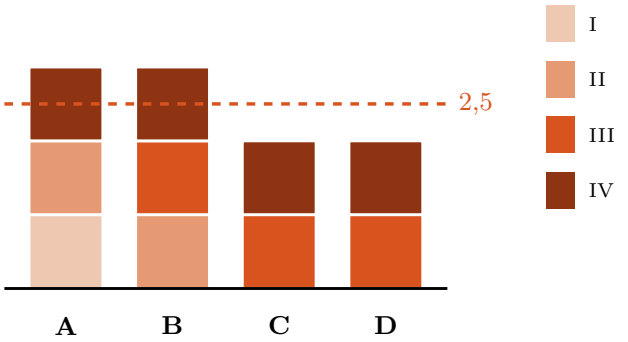


Figure 3: Démonstration du théorème 1 : dix bougie-dimanches en quatre colonnes. La ligne pointillée est la part équitable 2,5.

3 Dimanche coupé en deux : possible

Théorème 2. *Si l'on divise chaque dimanche en deux moitiés égales et que, dans chacune d'elles, k bougies brûlent, alors il existe un schéma au terme duquel toutes les bougies se consument de façon parfaitement égale.*

Démonstration. Il y a $2 \cdot 10 = 20$ moitiés, donc chaque bougie doit brûler 5 moitiés. Voici explicitement un tel schéma : Ier dimanche : A | A ; IIe : A B | C D ; IIIe : B C D | B C D ; IVe : toutes | toutes. Chaque bougie brûle exactement 5 moitiés. □

En pratique, cela signifie qu'à la moitié du deuxième dimanche on éteint A et B pour allumer C et D. Parmi les 9216 schémas admissibles par moitiés, 480 sont parfaits. La question de savoir si la famille acceptera que l'on éteigne des bougies au milieu de la prière dépasse le cadre du présent article.

la plus courte. La coutume a en revanche d'autres mérites, par exemple celui de ne pas exiger de tableau aimanté sur le frigo.

4 Lemme de la bougie rose

Le troisième dimanche de l'Avent est le dimanche de *Gaudete*, dimanche de la joie, où l'on allume pour la première fois la bougie rose. Si l'on respecte cet usage, la rose ne peut pas être allumée avant le IIIe dimanche.

Lemme 3. *Si la bougie rose ne peut pas brûler avant le IIIe dimanche, alors, pour* ***tout*** *découpage du dimanche en parts égales, les bougies ne se consument pas à parts égales.*

Démonstration. La rose peut brûler au plus pendant les IIIe et IVe dimanches, soit 2 dimanches au total. Pour un partage égal, il lui en faudrait 2,5. Un découpage plus fin du temps n'y change rien, puisqu'il manque une moitié de dimanche entière, et non un fragment de part. □

Que peut-on faire ? Sans découpage, le meilleur résultat est à nouveau la répartition $3,3,2,2$, la rose ayant brûlé 2 dimanches (15 schémas de ce type sur 27). Avec des moitiés, on obtient au mieux 3; 2,5; 2; 2,5, soit un écart total deux fois moindre que sans découpage. Avec un découpage en trois parts, on parvient à quelque chose de très beau : les trois bougies violettes brûlent à parts égales, chacune $2\frac{2}{3}$ dimanches, et la rose seulement 2.

Conclusion pastorale. La bougie rose reste toujours la plus haute. La joie dure plus longtemps que la pénitence.[4]

5 Généralisation : couronne à n bougies

Considérons une couronne à n bougies et n dimanches, où chaque dimanche est divisé en m parts égales et

[4] La thèse théologique n'a pas fait l'objet d'une évaluation par les pairs.

où, dans chaque part du k-ième dimanche, k bougies brûlent.

Théorème 4. *Un partage égal existe si et seulement si le nombre $m(n+1)$ est pair.*

Démonstration. Il y a en tout $m \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ « bougie-parts », soit $\frac{m(n+1)}{2}$ par bougie. Ce nombre doit être entier, d'où la condition nécessaire. La suffisance découle de la stratégie gloutonne : dans chaque part, on allume les k bougies qui ont brûlé le moins longtemps jusque-là. Si, avant une part donnée, les durées de combustion diffèrent d'au plus 1, il en va de même après (on rehausse les plus basses). À la fin, la somme est divisible par n et les valeurs diffèrent d'au plus 1, donc elles sont toutes égales. □

Il en découle un fait amusant : une couronne à **trois** ou à **cinq** bougies pourrait être consumée de manière égale sans aucun découpage des dimanches. Quatre bougies constituent, mathématiquement parlant, le choix le moins commode.[5]

Table 2: Un partage égal existe-t-il pour n bougies et m parts du dimanche ? (✓ — oui).

$n\backslash m$	1	2	3	4	5	6
2	·	✓	·	✓	·	✓
3	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	·	✓	·	✓	·	✓
5	✓	✓	✓	✓	✓	✓
6	·	✓	·	✓	·	✓
7	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	·	✓	·	✓	·	✓

6 Conclusions

- Sans découpage des dimanches, il est impossible de consumer les quatre bougies à parts égales. Le meilleur résultat est $3, 3, 2, 2$.
- Une fois les dimanches coupés en deux, c'est possible de 480 façons.
- Si la rose attend Gaudete, aucun découpage du temps ne permet d'obtenir une combustion égale.
- Dans le cas général, il suffit de vérifier si $m(n+1)$ est pair.

Un conseil pratique pour finir : si vous tenez à des bougies égales, allumez chaque dimanche celles qui sont les plus hautes. C'est précisément la stratégie gloutonne du Théorème 4, qui fonctionne aussi quand personne ne tient de tableau.

Version interactive: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/fr/`
Code de réplication: `https://czteryswiece.ponadmurami.pl/fr/wieniec/`

[5] Nous ne préconisons aucun changement de la tradition. Nous constatons, c'est tout.



Figure 4: Vérification expérimentale (veillée de Noël, variante par moitiés).

Bibliographie

1. J. H. Wichern, première couronne de l'Avent au Rauhes Haus, Hambourg 1839 (témoignage historique ; selon la tradition, elle portait une bougie pour chaque jour de l'Avent).
2. Normes universelles de l'année liturgique et du calendrier, 1969, n° 39–42 (l'Avent compte quatre dimanches).
3. P. G. L. Dirichlet, principe des tiroirs, XIXe siècle (invoqué ici davantage par sentiment que par nécessité).